

(બ) નીચેનાં વિધાનોની સત્યાર્થતા નક્કી કરો. તમારા જવાબનું સમર્થન આપો : ૮

$$(૧) \int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_{\pi}^{\frac{9\pi}{2}} \sqrt{\sin u} \cos u. d u.$$

(૨) જો $M = [0, 1]$ એ નિરપેક્ષ મૂલ્ય માન સહિત માનાવકાશ હોય તો

$$M \text{ માં } B\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] = \left[0, \frac{3}{4}\right].$$

(૩) $(0, \infty)$ એ R_d નો સીમિત ઉપગણ છે.

(૪) R_d નો અનંત ઉપગણ સુગ્રથિત છે.

૨ (અ) જો $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ એ વધતી ન હોય તેવી ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી હોય ૭

કે જેનું લક્ષ્ય શૂન્ય હોય તો સાબિત કરો કે $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ અભિસારી છે.

(બ) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ એ ઋણ ન હોય એવી સંખ્યાઓની શ્રેણી છે અને ૫

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n (n \in I)$. જો શ્રેણી $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ સીમિત હોય તો

સાબિત કરો કે $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ અભિસારી છે.

(ક) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : ૬

(૧) સાબિત કરો કે શ્રેણી $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 - 4n + 7}$ અપસારી છે.

(ર) જો $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ અને જો પ્રત્યેક $n \in I$ માટે $\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \leq \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ હોય તો સાબિત કરો કે $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$.

અથવા

૨ (અ) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી છે. જો ૭

$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Sup.} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 0$ હોય તો સાબિત કરો કે $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n; |x| < \frac{1}{L}$

માટે નિરપેક્ષ અભિસારી છે અને $|x| > \frac{1}{L}$ માટે અપસારી છે.

(બ) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ એ વધતી ન હોય એવી ધન સંખ્યાઓની શ્રેણી છે. જો ૫

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ અપસારી હોય તો સાબિત કરો કે $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ અપસારી છે.

(ક) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : ૬

(૧) સાબિત કરો કે શ્રેઢી $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^x}$ અપસારી છે.

(૨) જો $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ એ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓની અભિસારી શ્રેઢી હોય અને

$\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ એ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ની ઉપશ્રેણી હોય તો સાબિત કરો કે $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$

અભિસારી છે.

૩ (અ) જો $f \in R[a, b]$ તથા $a < c < b$ હોય તો સાબિત કરો કે ૭

$f \in R[a, c]; f \in R[c, b]$ અને $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

(બ) $[a, b]$ માં સીમિત વાસ્તવિક વિધેય f માટે સાબિત કરો કે ૬

$$u[f; \sigma] \geq u[f; \sigma^*]; \text{ જ્યાં } \sigma \subset \sigma^*.$$

(ક) જો f એ $[a, b]$ માં સતત હોય તો સાબિત કરો કે (a, b) માં એવો ૫

$$c \text{ મળે કે જેથી } \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a).$$

અથવા

૩ (અ) f એ $[a, b]$ પર સીમિત વિધેય છે. સાબિત કરો કે ૭

જો $f \in R[a, b]$ હોય તો તેને અંતરાલ $[a, b]$ નું ઉપવિભાજન

$$\delta \text{ મળે કે જેથી પ્રત્યેક } \epsilon > 0 \text{ માટે } u[f; \delta] - L[f; \delta] < \epsilon$$

થાય.

(બ) ϕ એ $[a, b]$ માં વાસ્તવિક વિધેય એવું છે કે જેથી ϕ' એ ૬

$[a, b]$ માં સતત થાય. જો $A = \phi(a)$, $B = \phi(b)$ અને

f એ $\phi([a, b])$ માં સતત હોય તો સાબિત કરો કે

$$\int_A^B f(x) dx = \int_a^b f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) \cdot du.$$

(ક) જો $f \in R[a, b]$ તો સાબિત કરો કે $|f| \in R[a, b]$ અને ૫

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

૪ (અ) $\langle M; \rho \rangle$ એ માનાવકાશ છે. $a \in M$ છે અને M પર, f તથા g બે ૭

વાસ્તવિક વિધેયો છે. જો $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ અને $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ હોય તો

સાબિત કરો કે $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$.

(બ) જો f અને g એ માનાવકાશ M_1 થી માનાવકાશ M_2 પર સતત ૬

વિધેયો હોય તો સાબિત કરો કે $f+g$ પણ M_1 માં સતત છે.

(ક) ધારો કે $x = (x_1, x_2)$; $y = (y_1, y_2)$. જો $x, y \in R^2$ અને ૫

$\rho(x, y) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{1/2}$ હોય તો સાબિત કરો કે ρ એ

માન છે.

અથવા

૪ (અ) $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ અને $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ માનાવકાશો છે. સાબિત કરો કે જો ૭

$f: M_1 \rightarrow M_2$ એ $a \in M_1$ આગળ સતત હોય તો અને તો જ જ્યારે

M_1 માં બિંદુઓની શ્રેણી $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, a ને અભિસરતી હોય ત્યારે M_2 માં

બિંદુઓની શ્રેણી $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(a)$ ને અભિસરે છે.

(બ) R એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. વિધેય $d: R \times R \rightarrow [0, \infty)$ નીચે ૬

મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે.

$d(x, y) = \begin{cases} 1; & \text{જો } x \neq y \\ 0; & \text{જો } x = y \end{cases}$ સાબિત કરો કે d એ માન છે.

(ક) $f: R^2 \rightarrow R; f(\langle x, y \rangle) = x; (\langle x, y \rangle \in R^2)$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે. ૫

સાબિત કરો કે f એ R^2 માં સતત છે.

૫ (અ) $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ અને $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ એ માનાવકાશો છે અને $f: M_1 \rightarrow M_2$ ૭

વિધેય છે. સાબિત કરો કે જો f એ M_1 પર સતત હોય તો અને તો જ

જ્યારે f એ M_2 નો સંવૃત્ત ઉપગણ હોય ત્યારે $f^{-1}(F)$ એ M_1 નો સંવૃત્ત

ઉપગણ છે.

(બ) $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ અને $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ એ માનાવકાશો છે. $f: M_1 \rightarrow M_2$ એ ૬

M_1 માં સતત છે. જો M_1 સંયોગી હોય તો સાબિત કરો કે f નો વિસ્તાર

પણ સંયોગી છે.

(ક) સાબિત કરો કે માનાવકાશ $\langle M, \rho \rangle$ નો ઉપગણ A સંપૂર્ણ સીમિત હોય ૫

તો અને તો જ પ્રત્યેક $\epsilon > 0$ માટે A , સાન્ત ઉપગણ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

એવો ધારણ કરે કે જે A માં ϵ - ગીય છે.

અથવા

૫ (અ) સાબિત કરો કે R' નો પ્રત્યેક વિવૃત્ત ઉપગણ G ને $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ૭

રીતે લખી શકાય છે કે જ્યાં I_1, I_2, \dots એ સાન્ત સંખ્યામાં અથવા ગણ્ય

સંખ્યામાં વિવૃત્ત અંતરાલો કે જેઓ પરસ્પર અલગ છે.

- (બ) M એ આપેલ માનાવકાશ છે. સાબિત કરો કે જો M સંયોગી હોય તો અને તો જ M પર વ્યાખ્યાયિત દરેક સતત લાક્ષણિક વિધેય અચળ છે. ૬
- (ક) f એ માનાવકાશ M પર સતત વાસ્તવિક વિધેય છે. જો A એ $x \in M$ નો એવો ગણ હોય કે જેથી $f(x) \geq 0$. સાબિત કરો કે A સંવૃત્ત છે. ૫
- ૬ (અ) સાબિત કરો કે જો માનાવકાશ M_1 ને હાઈને બોરેલ ગુણધર્મ હોય તો તે સુગ્રથિત છે. ૭
- (બ) સાબિત કરો કે સંપૂર્ણ માનાવકાશનો સંવૃત્ત ઉપગણ એ સંપૂર્ણ છે. ૬
- (ક) જો A અને B, R' ના સુગ્રથિત ઉપગણો હોય તો સાબિત કરો કે $A \times B$ પણ R^2 નો સુગ્રથિત ઉપગણ છે. ૫

અથવા

- ૬ (અ) $\langle M, \rho \rangle$ એ સંપૂર્ણ માનાવકાશ છે. દરેક $n \in I$ માટે જો F_n એ $\langle M, \rho \rangle$ માં સંવૃત્ત સીમિત ઉપગણો એવા હોય કે $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset F_4 \supset \dots$ અને $\text{diam } F_n = 0$ જ્યારે $n \rightarrow \infty$ તો સાબિત કરો કે $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ માં ફક્ત એક જ બિંદુ આવેલ છે. ૭
- (બ) જો $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F \neq \emptyset$ તો સાબિત કરો કે માનાવકાશ $\langle M, \rho \rangle$ સુગ્રથિત છે, જ્યાં \mathfrak{F} એ શાંત છેદ ગુણધર્મ ધરાવતો M ના સંવૃત્ત ઉપગણોનો સમૂહ છે. ૬

- (ક) $\langle M, \rho \rangle$ એ માનાવકાશ છે. જો $\langle M, \rho \rangle$ સુગ્રથિત હોય તો સાબિત ૫
કરો કે M માં આવેલ પ્રત્યેક શ્રેણી M ના બિંદુ આગળ અભિસરતી ઉપશ્રેણી
હોય છે.

ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) As per the Instruction No. 1 of Page no. 1.
(2) All questions are **compulsory**.
(3) Figures to the right indicate full marks of the question.
(4) Follow usual notations.

- 1 (a) Answer the following questions :

- (1) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$ is divergent. 2
(2) Show that one-point set is of measure zero in R' . 2
(3) If $f, g \in R[a, b]$ then prove that $(f + g) \in R[a, b]$. 2
(4) Prove that ϕ is open in any metric space. 2

- (b) Decide the validity of the following statements. Justify 8
your answer :

(1) $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_{\pi}^{\frac{9\pi}{2}} \sqrt{\sin u} \cos u. du.$

(2) Let $M = [0, 1]$ be a metric space with the absolute

value metric then in M , $B\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] = \left[0, \frac{3}{4}\right)$.

(3) $(0, \infty)$ is a bounded subset of R_d .

(4) An infinite subset of R_d is compact.

2 (a) Let $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a non-increasing sequence of positive 7

real numbers whose limit is zero. Prove that

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ is convergent.

(b) Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series of non-negative numbers 5

and $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n (n \in I)$. If the sequence

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is bounded then prove that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is

convergent.

(c) Answer the following questions : 6

(1) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 - 4n + 7}$ is divergent.

(2) If $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ and if for each $n \in I$, $\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \leq \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

then prove that $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$.

OR

2 (a) Let $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of real numbers. 7

If $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Sup. } \sqrt[n]{|a_n|} = L > 0$ then prove that

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ converges absolutely for $|x| < \frac{1}{L}$ and

diverges for $|x| > \frac{1}{L}$

(b) Let $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a non-increasing sequence of positive 5

numbers. If $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ is divergent then prove

that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent.

(c) Answer the following questions : 6

(1) Show that the series $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^x}$ is divergent.

(2) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series of positive real

numbers and if $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ is a subsequences of $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

then prove that $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ converges.

3 (a) If $f \in R[a, b]$ and $a < c < b$ then prove that **7**

$$f \in [a, c]; f \in [c, b] \text{ and } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(b) Prove that for a bounded real-valued function f **6**
on $[a, b]$, $u[f; \sigma] \geq u[f; \sigma^*]$; where $\sigma \subset \sigma^*$.

(c) If f is continuous on $[a, b]$, then prove that there **5**

exists $c \in (a, b)$, such that $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$.

OR

3 (a) Let f be a bounded function on $[a, b]$. **7**

Prove that if $f \in R[a, b]$ then for each $\epsilon > 0$ there
exists a subdivision δ of $[a, b]$ such that

$$u[f; \delta] - L[f; \delta] < \epsilon.$$

(b) Let ϕ be a real-valued function on $[a, b]$ such that **6**

ϕ' is continuous on $[a, b]$. Let $A = \phi(a)$, $B = \phi(b)$ and f is continuous on $\phi([a, b])$ then prove that

$$\int_A^B f(x) dx = \int_a^b f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) \cdot du.$$

(c) If $f \in R[a, b]$ then prove that $|f| \in R[a, b]$ and **5**

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

4 (a) Let $\langle M; \rho \rangle$ be a metric space and $a \in M$. Let **7**

f and g be two real valued functions on M . If

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \quad \text{then prove that}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M.$$

(b) Let f and g be continuous functions from a **6**

metric space M_1 into a metric space M_2 then prove

that $f + g$ is also continuous on M_1 .

(c) Let $x = (x_1, x_2)$; $y = (y_1, y_2)$. If $x, y \in R^2$ and **5**

$$\rho(x, y) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{1/2} \quad \text{then prove that } \rho \text{ is}$$

a metric.

OR

- 4 (a) Let $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ and $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ be metric spaces. Then 7
 prove that $f : M_1 \rightarrow M_2$ is continuous at $a \in M_1$ if and
 only if whenever $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of points in M_1
 converges to a then the sequence $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ of points
 in M_2 converges to $f(a)$.
- (b) Let R be the set of real numbers. Let the 6
 function $d : R \times R \rightarrow [0, \infty)$ be defined as
- $$d(x, y) = \begin{cases} 1; & \text{if } x \neq y \\ 0; & \text{if } x = y \end{cases}$$
- then prove that d is a metric.
- (c) Let $f : R^2 \rightarrow R$ be defined as $f(\langle x, y \rangle) = x$; ($\langle x, y \rangle \in R^2$). 5
 Show that f is continuous on R^2 .
- 5 (a) Let $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ and $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ be two metric spaces. Prove 7
 that $f : M_1 \rightarrow M_2$ be continuous on M_1 if and only if
 $f^{-1}(F)$ is a closed subset of M_1 whenever F is a closed
 subset of M_2 .
- (b) Let $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ and $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ be two metric spaces. 6
 Let $f : M_1 \rightarrow M_2$ be continuous on M_1 . If M_1 is
 connected then prove that the range of f is also
 connected.

- (c) Prove that the subset A of the metric spaces $\langle M, \rho \rangle$ is totally bounded if and only if for every $\epsilon > 0$. A contains a finite subset $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ which is ϵ -dense in A . **5**

OR

- 5** (a) Prove that every open subset G of R' can be written as $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$; where I_1, I_2, \dots are a finite number or a countable number of open intervals which are mutually disjoint. **7**
- (b) Let M be a metric space. Prove that M is connected if and only if every characteristic function on M is constant. **6**
- (c) Let f be a continuous real valued function on the metric space M . Let A be the set of all $x \in M$ such that $f(x) \geq 0$. Prove that A is closed. **5**
- 6** (a) Prove that if a metric space M has the Heine Borel property, then M is compact. **7**
- (b) Prove that a closed subset of a complete metric space is complete. **6**
- (c) If A and B are compact subsets of R' then prove that $A \times B$ is a compact subset of R^2 . **5**

OR

- 6 (a) Let $\langle M, \rho \rangle$ be a complete metric space. For each $n \in I$, 7
 let F_n be closed bounded subsets of $\langle M, \rho \rangle$ such that
 $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset F_4 \supset \dots$ and $\text{diam } F_n = 0$ as $n \rightarrow \infty$ then
 show that $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ contains exactly one point.
- (b) If $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F \neq \emptyset$ then prove that the metric space $\langle M, \rho \rangle$ 6
 is compact; where \mathfrak{F} is a family of closed subsets of
 M with the finite intersection property.
- (c) Let $\langle M, \rho \rangle$ be a metric space. If $\langle M, \rho \rangle$ is compact 5
 then prove that every sequence of points in M has a
 subsequence converging to a point in M .
